Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 3

1) Use a fórmula genérica da parametrização de uma superfície:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{e}_x + y(u,v)\vec{e}_y + z(u,v)\vec{e}_z, u \in A, v \in B.$$

onde A, B são certos intervalos.

a) para representar parametricamente a superfície lateral de um cilindro de raio R, com eixo vertical paralelo ao eixo $\vec{e}_z$, com z variando entre 0 e 2. Sugestão: Use: $u = \theta = arc\ tg\left(\frac{y}{x}\right)$ ou seja a coordenada polar no plano x,y e $v = z$. Determine os intervalos A, B correspondentes.

b) Calcule as derivadas $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ e o vetor $\vec{a}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ em função de (u,v). Calcule o versor normal à superfície, $\vec{n} = vers(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v})$.

c) O elemento infinitesimal de superfície é dado por: $dS = \left||\vec{a}|\right|\ du\ dv$. Calcule esse elemento infinitesimal em função de (u,v) e a área da superfície $\int_A \int_B \left||\vec{a}|\right|\ du\ dv$.

2) Uma curva descrita em coordenadas polares (ρ, θ) é dada por uma certa função: $\rho(\theta)$. Por exemplo num arco de circunferência de raio R, vem $\rho(\theta) = R,\ \ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Considerando $\overrightarrow{r1}(\theta)$ o vetor posição para o argumento angular θ, tem-se que o elemento infinitesimal de arco é: $dl = \left|\left|\frac{d\overrightarrow{r1}}{d\theta}\right|\right| d\theta = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}$ onde $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ e a área infinitesimal do sector circular (estendendo-se de $\rho = 0$ até $\rho(\theta)$ e entre θ e $\theta + d\theta$) é $dS = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{r1} \times \frac{\partial \overrightarrow{r1}}{\partial \theta}\right|\right| d\theta$. A fórmula é a mesma para uma curva torsa genérica $\vec{r}(t)$ onde $dS = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{r1} \times \frac{\partial \overrightarrow{r1}}{\partial t}\right|\right| dt$.

a) Aplique essas fórmulas para deduzir o perímetro da circunferência e área do círculo de raio R.

b) Calcule o comprimento da linha e área subtendida correspondendente a $\rho(\theta) = k\theta,\ \ \theta \in [0,2\pi]$. Compare com o perímetro e área do círculo de raio médio $R = \pi\theta$.

3) A temperatura num ponto $P(x,y)$ de uma placa metálica é dada pelo campo escalar $T(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

a) Calcule o gradiente

b) Determine a fórmula das isolinhas e forneça um vetor paralelo às isolinhas. Note que esse vetor deve ser perpendicular ao gradiente.

c) Determine a taxa de variação de $T(x,y)$ ao longo da direção dada pelo vetor $2\vec{e}_x - \vec{e}_y$.

d) Calcule o Laplaciano de $T(x,y)$.

4) Dado o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\vec{e}_x + xyz\vec{e}_y + z^2y\vec{e}_z$. Calcule a sua divergência e rotacional.

5) Calcule a divergência e rotacional de um campo de velocidade no plano x,y correspondente a uma rotação com velocidade angular Ω constante.